Del mismo autor

ALGEBRA II

Espacios vectoriales. Matrices.
Trasformaciones lineales.
Diagonalización.

álgebra I

Armando O. Rojo

Ex Profesor Titular del Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

Decimoctava edición

LIBRERIA-EDITORIAL
EL ATENEO

512 (075) Rojo, Armando
ROJ
Algebra I - 18a. ed. - Buenos Aires: El Ateneo, 1996.
489 p.; 23 x 16 cm.

ISBN 950-02-5204-X

I. Título - I. Matemática - Enseñanza Secundaria

Se terminó de imprimir el 21 de junio de 1996
en Impresiones Avellaneda, Manuel Ocantos 253,
Avellaneda, provincia de Buenos Aires.
Tirada: 2.000 ejemplares.

IMPRESO EN LA ARGENTINA

PROLOGO

La enseñanza de los contenidos fundamentales del álgebra actual y el uso de su peculiar terminología son una realidad en todos los cursos básicos a nivel universitario y profesoral. Creo que hay dos razones principales que dan crédito a esa determinación: una asociada al progreso de las ciencias, a la unidad conceptual y, en última instancia, al mundo de la inteligencia; la otra vinculada estrechamente a sus aplicaciones en casi todas las disciplinas de interés práctico y de vigencia cotidiana.

No escapan a estas consideraciones las dificultades que se presentan inicialmente ante lo que es, de alguna manera, nuevo. Precisamente esa constancia me ha movido a redactar este texto elemental de álgebra, en el que he procurado desarrollar sus contenidos con una metodología que estimo apropiada. Se han intercalado ejemplos que, además de ilustrar la teoría, hacen posible la adquisición de métodos adecuados de trabajo. Un detalle que juzgo de interés para los lectores es la respuesta que se da a los problemas propuestos, o al menos la sugerencia de pautas para las demostraciones que figuran en los trabajos prácticos.

Doy testimonio de mi agradecimiento a los amigos que me han ayudado y estimulado en esta tarea, y a la Editorial EL ATENEO, cuyo personal no ha escatimado esfuerzos para resolver las dificultades inherentes a la publicación del texto.

ARMANDO O. ROJO

CONTENIDO

Capítulo 1

NOCIONES DE LOGICA

1.1. INTRODUCCION

Todo desarrollo matemático exige razonar en forma válida acerca de cosas trascendentes y particularmente abstractas. Hay que comenzar por eliminar las ambigüedades del lenguaje ordinario, introduciendo símbolos y conectivos cuyo uso adecuado descarte las contingencias, aporte claridad y economía de pensamiento. En este capítulo introducimos el concepto de proposición, las operaciones proposicionales y sus leyes, reglas de inferencia, y la cuantificación de funciones proposicionales, cuyo uso estará presente en todo el texto.

1.2. PROPOSICIONES

Consideramos las siguientes oraciones:

1. ¿Quién viene?
2. Deténgase
3. El calor dilata los cuerpos
4. 4 es un número impar
5. Juan ama la música
6. La música es amada por Juan

Se trata de seis oraciones diferentes, una interrogativa, una orden y cuatro declarativas. De las dos primeras no podemos decir que sean verdaderas ni falsas; una pregunta puede formularse o no, y una orden puede ser cumplida o no. En cambio, de las cuatro últimas, que son declarativas, tiene sentido decir si son verdaderas o falsas. A éstas las llamamos proposiciones.

Definición

Proposición es toda oración respecto de la cual puede decirse si es verdadera o falsa.

Es decir, proposición es toda oración declarativa. Toda proposición está asociada a un valor de verdad, el cual puede ser verdadero (V) o bien falso (F). Las oraciones (5) y (6) son diferentes desde el punto de vista gramatical; el objeto directo de la (5) es el sujeto de la (6), pero ambas tienen el mismo significado, y las consideramos como la misma proposición. Podemos decir entonces *proposición es el significado de toda oración declarativa.*

1.3. NOTACIONES Y CONECTIVOS

Las proposiciones genéricas son denotadas con las letras p, q, r, etc. A partir de proposiciones simples es posible generar otras, simples o compuestas. Es decir, se puede operar con proposiciones, y según sean tales operaciones se utilizan ciertos símbolos, llamados conectivos lógicos.

Conectivo	Operación asociada	Significado
$\sim$	Negación	no p o no es cierto que p
$\wedge$	Conjunción o producto lógico	p y q
$\vee$	Disyunción o suma lógica	p o q (en sentido incluyente)
$\Rightarrow$	Implicación	p implica q o si p, entonces q
$\Leftrightarrow$	Doble implicación	p si y sólo si q
$\veebar$	Diferencia simétrica	p o q (en sentido excluyente)

1.4. OPERACIONES PROPOSICIONALES

Definiremos las operaciones entre proposiciones en el sentido siguiente: dadas una o dos proposiciones, cuyos valores de verdad se conocen, se trata de caracterizar la proposición resultante a través de su valor de verdad. Se supone que en la elección de estos valores se tiene en cuenta el buen sentido.

1.4.1. Negación

Definición

Negación de la proposición p es la proposición $\sim p$ (no p), cuya tabla de valores de verdad es

p	$\sim p$
V	F
F	V

Se trata de una operación unitaria, pues a partir de una proposición se obtiene otra, que es su negación.

Ejemplo 1-1.

La negación de

p : todo hombre es honesto

es $\sim p$: no todo hombre es honesto

o bien: $\sim p$: no es cierto que todo hombre es honesto

$\sim p$: hay hombres que no son honestos

$\sim p$: existen hombres deshonestos

la cual es V, ya que la primera es F.

1.4.2. Conjunción

Definición

Conjunción de las proposiciones p y q es la proposición $p \wedge q$ (p y q), cuya tabla de valores de verdad es

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La tabla que define la operación establece que la conjunción sólo es verdadera si lo son las dos proposiciones componentes. En todo otro caso es falsa.

Ejemplo 1-2.

Si declaramos

i) 3 es un número impar y 2 es un número primo

se trata de la conjunción de las proposiciones

p : 3 es un número impar

q : 2 es un número primo

y por ser ambas verdaderas, la proposición compuesta es V.

ii) hoy es lunes y mañana es jueves

esta conjunción es F, ya que no coexisten las verdades de p y q.

1.4.3. Disyunción

Definición

Disyunción de las proposiciones p y q es la proposición $p \vee q$ (p o q) cuya tabla de valores de verdad es

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La conjunción *o* es utilizada en sentido incluyente, ya que la verdad de la disyunción se da en el caso de que al menos una de las proposiciones sea V. En el lenguaje ordinario la palabra *o* es utilizada en sentido excluyente o incluyente.

La ambigüedad se elimina con la elección del símbolo adecuado.

En matemática se utiliza la disyunción definida por la tabla precedente, la cual agota toda posibilidad.

La disyunción sólo es F en el caso en que las dos proposiciones componentes sean falsas.

Ejemplo 1-3.

i) hoy es lunes o martes

representa la disyunción de las proposiciones p: hoy es lunes y q: hoy es martes. El sentido de la "conjunción" *o* es exlcuyente, ya que p y q no pueden ser simultáneamente verdaderas. No obstante, la proposición compuesta puede analizarse a la luz de la tabla propuesta, a través de los tres últimos renglones, y será falsa sólo si las dos lo son.

ii) regalo los libros viejos o que no me sirven

es la disyunción de las proposiciones

p : regalo los libros viejos
q : regalo los libros que no me sirven

El sentido del *o* es incluyente, pues si en efecto regalo un libro que es viejo, y que además no me sirve, entonces $p \vee q$ es V.

iii) 3 es un número impar o 4 es un número primo

es una propoposición V, pues la primera es V.

1.4.4. Implicación o Condicional

Definición

Implicación de las proposiciones p y q es la proposición $p \Rightarrow q$ (p implica q, si p entonces q) cuya tabla de valores de verdad es

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Las proposiciones p y q se llaman antecedente y consecuente de la implicación o condicional. La implicación usual en matemática es formal en el sentido de que no es necesario que el consecuente se derive lógicamente del antecedente; cuando esto ocurre, la implicación se llama material y queda incluida en la primera.

Las tablas de valores de verdad se definen arbitrariamente, pero respetando el sentido común. Enunciamos la siguiente proposición:

"SI apruebo el examen, ENTONCES te presto el apunte" (1)

Se trata de la implicación de las proposiciones

p : apruebo el examen
q : te presto el apunte

Interesa inducir la verdad o falsedad de la implicación (1), en términos de la V o F de las proposiciones p y q. El enunciado (1) puede pensarse como un compromiso, condicionado por p, y podemos asociar su verdad al cumplimiento del compromiso. Es obvio que si p es F, es decir, si no apruebo el examen, quedo liberado del compromiso, y preste o no preste el apunte la proposición (1) es V. Es decir, si el antecedente es F, la implicación es V.

Si p es V, en cuyo caso apruebo el examen, y no presto el apunte, el compromiso no se cumple, y la proposición (1) es entonces F. Si p y q son V, entonces la implicación es V porque el compromiso se cumple.

De este modo, la implicación sólo es falsa cuando el antecedente es V y el consecuente es F.

Ejemplo 1-4.

i) si hoy es lunes, entonces mañana es martes

es la implicación de las proposiciones

p : hoy es lunes
q : mañana es martes

Como no puede darse antecedente V y consecuente F, la implicación es V.

ii) $1 = -1 \Rightarrow 1^2 = (-1)^2$

es V por ser el antecedente F.

1.4.5. Doble implicación o bicondicional

Definición

Doble implicación de las proposiciones p y q es la proposición $p \Leftrightarrow q$ (p si y sólo si q), cuya tabla de valores de verdad es

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La doble implicación o bicondicional sólo es verdadera si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

La doble implicación puede definirse como la conjunción de una implicación y su recíproca. De este modo, la tabla de valores de verdad de $p \Leftrightarrow q$, puede obtenerse mediante la tabla de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, como sigue

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Ejemplo 1-5.

i) T es equilátero si y sólo si T es equiángulo

es la doble implicación de las proposiciones

p : T es equilátero
q : T es equiángulo

Toda vez que p sea V, también lo es q, y análogamente, si p es F, q es F. De modo que la doble implicación es V.

ii) $a = b$ si y sólo si $a^2 = b^2$

las proposiciones son

$p : a = b$
$q : a^2 = b^2$

la doble implicación propuesta es falsa si p es F y q es V. En los demás casos es V.

1.4.6. Diferencia simétrica

Definición

Diferencia simétrica o disyunción excluyente de las proposiciones p y q es la proposición $p \veebar q$ (p o q, en sentido excluyente) cuya tabla de valores de verdad es

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La verdad de $p \veebar q$ está caracterizada por la verdad de una y sólo una de las proposiciones componentes.

Es claro que $p \veebar q$ equivale a la negación de $p \Leftrightarrow q$.

1.5. CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES

Consideramos la tabla de valores de verdad de la implicación

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Hay tres casos en que $p \Rightarrow q$ es V, y entre ellos hay uno en que p es V, en el cual resulta q verdadera. Es obvio que nos referimos al primer renglón de la tabla, y se tiene que si $p \Rightarrow q$ es V y p es V, entonces q es V. Se dice entonces que el antecedente p es condición suficiente para el consecuente q.

En cambio, si p es F, nada podemos decir de q, puesto que puede ser V o F. Por otra parte, cuando $p \Rightarrow q$ es V, si q es V, entonces p puede ser V o F; mas para que p sea V se necesita que q lo sea. Se dice entonces que q es condición necesaria para p.

Resumiendo, si $p \Rightarrow q$ es V, entonces p es condición suficiente para q y q es condición necesaria para p.

Estas condiciones suelen expresarse así:

q si p (condición suficiente)
p sólo si q (condición necesaria)

Ejemplo 1-6.

La siguiente implicación es V:

"SI T es equilátero, ENTONCES T es isósceles"

En este caso p : T es equilátero
q : T es isósceles

y p es condición suficiente para q, es decir, que un triángulo sea equilátero es suficiente para asegurar que sea isósceles. Por otra parte, T es equilátero sólo si es isósceles; es decir, que un triángulo sea isósceles es necesario para que sea equilátero.

Sea ahora la doble implicación $p \Leftrightarrow q$, es decir $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Si $p \Leftrightarrow q$ es V, entonces $p \Rightarrow q$ es V y $q \Rightarrow p$ es V. Se tiene, atendiendo a la primera, que p es condición suficiente para q; y, teniendo en cuenta la segunda implicación, ocurre que p es condición necesaria para q.

Es decir, si $p \Leftrightarrow q$ es V, entonces el antecedente p es condición necesaria y suficiente para el consecuente q.

Análogamente, en el caso de doble implicación verdadera, el consecuente q es también condición necesaria y suficiente para el antecedente p.

Ejemplo 1-7.

La proposición

"T es equilátero SI Y SOLO SI T es equiángulo"

es la doble implicación de las proposiciones

p : T es equilátero
q : T es equiángulo

Aquélla es V, y cualquiera de las dos proposiciones es condición necesaria y suficiente para la otra.

1.6. LEYES LOGICAS

Consideremos la proposición

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q \qquad (1)$$

cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

La proposición compuesta (1) es V, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones componentes. Se dice entonces que tal proposición es una tautología o ley lógica.

La proposición $p \Rightarrow p$ es V cualquiera que sea el valor de verdad de p. Es otro ejemplo de una ley lógica.

En cambio $p \wedge \sim p$ es F, cualquiera que sea p. Se dice que es una contradicción.

En el cálculo proposicional se utilizan las siguientes leyes o tautologías cuya demostración se reduce a la confección de la correspondiente tabla de valores de verdad:

1.6.1. Involución

$$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$$

el modo de leerla es: "no, no p, equivale a p".

1.6.2. Idempotencia

$$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$$
$$(p \vee p) \Leftrightarrow p$$

1.6.3. Conmutatividad

a) de la disyunción $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

b) de la conjunción $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

1.6.4. Asociatividad

a) de la disyunción

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

b) De la conjunción

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

1.6.5. Distributividad

a) de la conjunción respecto de la disyunción

$$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

b) de la disyunción respecto de la conjunción

$$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

1.6.6. Leyes de De Morgan

a) La negación de una disyunción es equivalente a la conjunción de las negaciones

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

b) La negación de una conjunción es equivalente a la disyunción de las negaciones

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

Ejemplo 1-8.

Tabla de valores de verdad de la distributividad de la conjunción respecto de la disyunción.

$$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

Cada valor de verdad de p puede asociarse a dos valores de verdad de q, y por cada uno de estos pares de valores se tienen dos posibilidades para r; en consecuencia, resultan $2^3 = 8$ renglones en la tabla. Si se dan n proposiciones, en la tabla hay que analizar 2^n renglones.

Por otra parte, es posible simplificar la confección de la tabla, como se indica a continuación

$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	r	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge r)$	$\vee$	$(q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	V	F	F	F
V	V	F	V	V	V	V	V	F
V	V	F	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	V	V	F	F	F
F	F	F	F	F	V	F	F	F

Ejemplo 1-9.

Confeccionamos la tabla de valores de verdad de la siguiente ley de De Morgan:

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

$\sim$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\Leftrightarrow$	$\sim p$	$\vee$	$\sim q$
F	V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V	F
V	F	F	F	V	V	V	V

Ejemplo 1-10.

La proposición

$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

es una ley lógica, pues la tabla

$(p$	$\wedge$	$q)$	$\Rightarrow$	p
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	F	V	V	F
F	F	F	V	F

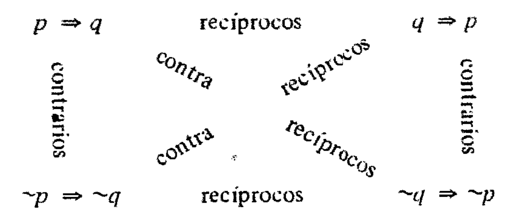
nos muestra que es una tautología.

1.7. IMPLICACIONES ASOCIADAS

Sea el condicional $p \Rightarrow q$, que llamamos directo; en conexión con él, se presentan otros tres, obtenidos por permutaciones o negaciones del antecedente y consecuente:

$q \Rightarrow p$ recíproco
$\sim p \Rightarrow \sim q$ contrario
$\sim q \Rightarrow \sim p$ contrarrecíproco

Las cuatro implicaciones propuestas se llaman conjugadas, y cualquiera de ellas puede tomarse como directa. El siguiente esquema nos proporciona la relación que las vincula:



Es fácil verificar que las implicaciones contrarrecíprocas son equivalentes, es decir, los siguientes bicondicionales son tautologías:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$
$$(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$$

Si la implicación directa es V, también lo es la contrarrecíproca, y no podemos afirmar la verdad de la recíproca ó de la contraria. Pero si son verdaderos un condicional y su recíproco o contrario, entonces son verdaderos los cuatro, y las proposiciones antecedente y consecuente son equivalentes.

Se presenta continuamente la necesidad de demostrar la verdad de $p \Rightarrow q$, y de acuerdo con lo expuesto se presentan dos métodos:

i) *directo*. Si p es F, nada hay que probar, pues en este caso $p \Rightarrow q$ es V. Si p es V hay que establecer que el valor de verdad de q es V.

ii) *indirecto*. Si q es V queda establecida la verdad de $p \Rightarrow q$. Pero si q es F hay que examinar p y llegar a establecer que su valor de verdad es F.

1.8. NEGACION DE UNA IMPLICACION

Las proposiciones $p \Rightarrow q$ y $\sim(p \wedge \sim q)$ son equivalentes, como lo muestra la siguiente tabla

(p	$\Rightarrow$	q)	$\Leftrightarrow$	$\sim$	(p	$\wedge$	$\sim q$)
V	V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F	F
F	V	F	V	V	F	F	V

En consecuencia, la negación de la primera equivale a la negación de la segunda, es decir

$$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim[\sim(p \wedge \sim q)]$$

y por 1.6.1, se tiene

$$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$$

Es decir, la negación de una implicación no es una implicación, sino la conjunción del antecedente con la negación del consecuente.

Ejemplo 1-11.

Sean las implicaciones

i) Si hoy es lunes, entonces mañana es miércoles.

ii) $1 = -1 \Rightarrow 1^2 = (-1)^2$

Sus negaciones son, respectivamente,

"Hoy es lunes y mañana no es miércoles"

" $1 = -1 \wedge 1^2 \neq (-1)^2$ "

1.9. RAZONAMIENTO DEDUCTIVO VALIDO

En matemática interesa el tipo de razonamiento llamado deductivo. Llamamos razonamiento a un par ordenado $(\{p_i\} ; q)$, siendo $\{p_i\}$ un conjunto finito de proposiciones, llamadas premisas, y q una proposición, llamada conclusión, respecto de la cual se afirma que deriva de las premisas.

Un razonamiento es deductivo si y sólo si las premisas son evidencias de la verdad de la conclusión, es decir, si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son verdaderas, entonces q verdadera. Un razonamiento deductivo es válido si no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. De un razonamiento no se dice que es V o F, sino que es válido o no.

Llamamos regla de inferencia, a todo esquema válido de razonamiento, independientemente de la V o F de las proposiciones componentes. De este modo, toda regla de inferencia es tautológica.

Un razonamiento deductivo es válido cuando el condicional cuyo antecedente es la conjunción de las premisas, y el consecuente es la conclusión, es tautológico.

Son ejemplos de reglas de inferencia:

a) Ley del *modus ponens:*

SI p y $p \Rightarrow q$, ENTONCES q

La notación clásica es

$$\begin{array}{c} p \\ p \Rightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

b) Ley del *modus tolens:*

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

Este esquema es la notación clásica del condicional

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$$

c) Ley del silogismo hipotético:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline p \Rightarrow r \end{array}$$

Es decir, la proposición $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ es una tautología.

En cambio, el condicional $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$ no es una forma válida de razonamiento, ya que la correspondiente tabla de valores de verdad nos muestra que no es tautológico.

Ejemplo 1-12.

a) Justificar la validez del razonamiento

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \sim r \Rightarrow \sim q \\ \sim(\sim p \wedge \sim t) \\ t \Rightarrow s \\ \sim r \\ \hline s \end{array}$$

En lugar de confeccionar la tabla del condicional entre la conjunción de las premisas y la conclusión, haremos uso de las leyes del cálculo proposicional, a fin de simplificar la situación. La segunda premisa es equivalente a la contrarrecíproca $q \Rightarrow r$; por la ley del silogismo hipotético, de la primera y de ésta, resulta $p \Rightarrow r$. La última premisa es V, y en consecuencia r es F, y como $p \Rightarrow r$ es V resulta necesariamente que p es F. La tercera premisa equivale a $p \vee t$, de acuerdo con una ley de De Morgan, y por ser p falsa resulta la verdad de t. Ahora bien, siendo t y $t \Rightarrow s$ verdaderos, resulta la verdad de s, por 1.9 a).

b) Justificar la validez del razonamiento cuyas premisas son:

Hoy llueve o hace frío,
Hoy llueve o no hace frío,

y la conclusión: Hoy llueve.

En lenguaje simbólico se tiene

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ p \vee \sim q \\ \hline p \end{array}$$

q, o bien $\sim q$ es F; cualquiera que sea el caso, por ser las disyunciones verdaderas, resulta que p es V. De otro modo, la conjunción de ambas disyunciones, por la distributividad, es equivalente a $p \vee (q \wedge \sim q)$. La verdad de aquéllas asegura la verdad de ésta, y como $q \wedge \sim q$ es F, resulta la verdad de p.

1.10. FUNCIONES PROPOSICIONALES. SU CUANTIFICACION

El símbolo P (x) es la representación de un predicado o propiedad relativos al objeto indeterminado x, perteneciente a cierto universo o conjunto. Si nos referimos a

los números enteros y estamos interesados en la propiedad de ser impar, entonces la traducción de P (x) consiste en: x es impar, y se escribe

$$\text{P}(x) : x \text{ es impar}$$

Es claro que el enunciado: "x es impar" no es una proposición, ya que a menos que se especifique a x no podemos decir nada acerca de su verdad o falsedad. Ocurre, sin embargo, que para cada asignación dada al sujeto x dicho enunciado es una proposición. A expresiones de este tipo se las llama funciones o esquemas proposicionales.

Definición

Función proposicional en una variable o indeterminada x es toda oración en la que figura x como sujeto u objeto directo, la cual se convierte en proposición para cada especificación de x.

En nuestro ejemplo resultan proposiciones como

P (-4) : -4 es impar (F)
P (5) : 5 es impar (V), etc.

Se presentan también funciones proposicionales con dos variables o indeterminadas. Sea, por ejemplo

$$\text{P}(x, y) : x \text{ es divisor de } y$$

Lo mismo que en el caso anterior, si x e y son enteros, P (x, y) no es proposición, ya que no podemos afirmar la verdad o falsedad del enunciado. Mas para cada particularización de valores se tiene una proposición

P $(-2, 6)$: -2 es divisor de 6 (V)
P $(12, 6)$: 12 es divisor de 6 (F)

A partir de funciones proposicionales es posible obtener proposiciones generales mediante un proceso llamado de cuantificación. Asociados a la indeterminada x, introducimos los símbolos $\forall x$ y $\exists x$, llamados cuantificadores universal y existencial en x, respectivamente. Las expresiones

Para todo x, se verifica P (x)
Existe x, tal que se verifica P (x)

se denotan mediante $\forall x : \text{P}(x)$ (1)
$\exists x / \text{P}(x)$ (2)

y corresponden a una función proposicional P (x) cuantificada universalmente en el primer caso, y existencialmente en el segundo. Una función proposicional cuantificada adquiere el carácter de proposición. En efecto, retomando el primer ejemplo, si decimos

"Todos los números enteros son impares". (1')

es claro que hemos enunciado una proposición general y relativa a todos los números enteros, cuyo valor de verdad es F. Una traducción más detallada de esta proposición consiste en

"Cualquiera que sea x, x es impar".

Es decir $\forall x : x$ es impar

Si cuantificamos existencialmente la misma función proposicional, se tiene

$\exists x / x$ es impar

O sea "Existe x, tal que x es impar".

O bien "Existen enteros que son impares". (2')

O más brevemente "Hay enteros impares".

El valor de verdad es V, y en consecuencia se trata de una proposición. El cuantificador existencial se refiere a, por lo menos, un x.

Es obvio que una función proposicional cuantificada universalmente es V si y sólo si son V todas las proposiciones particulares asociadas a aquélla. Para asegurar la verdad de una función proposicional, cuantificada existencialmente, es suficiente que sea verdadera alguna de las proposiciones asociadas a la función proposicional.

Un problema de interés es la negación de funciones proposicionales cuantificadas. La negación (1') es

"No todos los enteros son impares"

es decir "Existen enteros que no son impares"

y en símbolos $\exists x / \sim P(x)$

Entonces, para negar una función proposicional cuantificada universalmente se cambia el cuantificador en existencial, y se niega la función proposicional.

La negación de (2') es

"No existen enteros impares".

Es decir "Cualquiera que sea el entero, no es impar"

o lo que es lo mismo

"Todo entero es par".

En símbolos $\forall x : \sim P(x)$

Vale entonces la siguiente regla: para negar una función proposicional cuantificada existencialmente se cambia el cuantificar en universal, y se niega la funcion proposicional.

Se tienen las siguientes equivalencias

$$\sim[\forall x : P(x)] \Leftrightarrow \exists x / \sim P(x)$$
$$\sim[\exists x / P(x)] \Leftrightarrow \forall x : \sim P(x)$$

Ejemplo 1-13.

Sea la proposición:

Todo el que la conoce, la admira.

Nos interesa escribirla en lenguaje simbólico, negarla, y retraducir la negación al lenguaje ordinario.

La proposición dada puede enunciarse:

Cualquiera que sea la persona, si la conoce, entonces la admira.

Aparece clara la cuantificación de una implicación de las funciones proposicionales

$P(x) : x$ la conoce
$Q(x) : x$ la admira

Se tiene

$$\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$$

Teniendo en cuenta la forma de negar una función proposicional cuantificada universalmente y una implicación resulta

$$\exists x / P(x) \wedge \sim Q(x)$$

Y pasando al lenguaje ordinario:

Hay personas que la conocen y no la admiran.

Ejemplo 1-14.

Consideremos la misma cuestión en el siguiente caso:

Todo entero admite un inverso aditivo.

Es decir

"Cualquiera que sea el entero, existe otro que sumado a él da cero".

Intervienen dos variables y la función proposicional

$$P(x, y) : x + y = 0$$